Primjena dvostrukog integrala

Matematika 2

Erna Begović Kovač, 2019.

Literatura: I. Gusić, Lekcije iz Matematike 2

`http://matematika.fkit.hr`

Uvod

Neke primjene dvostrukog integrala su:

- Računanje volumena,
- Računanje površine,
- Problem mase nehomogene ploče,
- Problem težišta nehomogene ploče.

Volumen

Ako je $f(x, y)$ pozitivna funkcija, onda

$$V = \int \int_D f(x, y) dx\, dy$$

predstavlja volumen tijela iznad područja D, omeđenog grafom funkcije f.

Općenitije, ako je tijelo omeđeno plohama $z_1 = f(x, y)$ i $z_2 = g(x, y)$, pri čemu funkcije f i g imaju istu domenu D na kojoj vrijedi $g(x, y) \leq f(x, y)$, onda je volumen takvog tijela dan dvostrukim integralom

$$V = \int \int_D (f(x, y) - g(x, y)) dx\, dy.$$

Primjer 1

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 2 - x$ i plohom $z = x + y^2$.

Primjer 2

Izračunajte volumen tijela omeđenog ravninama $x = 2$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2}$ i plohama $z = 2x^2$ i $z = -x^2$.

Površina

U formuli za volumen $V = \int\int_D f(x,y)dx\,dy$, izraz $dx\,dy$ predstavlja element površine.

Ako stavimo $f(x,y) = 1$, dvostruki integral po D daje površinu područja D,

$$P = \int\int_D dx\,dy.$$

Primjer 3

Izračunjate površinu područja omeđenog parabolama $y = x^2 - 2x$ i $y = -x^2$.

Površina u polarnim koordinatama

Da bi dobili formulu za površinu u polarnim koordinatama, u formulu za volumen u polarnim koordinatama

$$V = \int\int_D f(r\cos\phi, r\sin\phi) r\, dr\, d\phi$$

uvrstimo $f(r\cos\phi, r\sin\phi)r = 1$ pa je površina područja D dana formulom

$$P = \int\int_D r\, dr\, d\phi.$$

Primjer 4

Izračunajte površinu područja omeđenog pravcima $y = x$, $y = -x$ i lukom kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Masa nehomogene ploče

Promatramo područje D (ploču) u ravnini. Ako je masa ploče jednoliko razmazana, ploča je **homogena**, u protivnom je **nehomogena**.

U slučaju nehomogene ploče, masa ovisi o funkciji gustoće mase $f(x, y)$.

Uzmimo mali dio područja D, pravokutnik sa stranicama $\triangle x$ i $\triangle y$.

Masa takvog pravokutnika je $\triangle m$, a prosječna gustoća mu je

$$\overline{f(x, y)} = \frac{\triangle m}{\triangle x \triangle y}.$$

Prelaskom na limes dolazimo do pojma gustoće mase u točki (x, y),

$$f(x, y) = \lim_{\triangle x \to 0,\ \triangle y \to 0} \frac{\triangle m}{\triangle x \triangle y}.$$

Masa nehomogene ploče

Imamo

$$\triangle m \approx f(x,y)\triangle x \triangle y \qquad \Rightarrow \qquad dm = f(x,y)dx\,dy,$$

pa je

$$m = \int\int_D f(x,y)dx\,dy.$$

Ova je formula analogna formuli za masu nehomogenog segmenta

$$m = \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 5

Neka je D pravokutnik određen sa $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Neka je funkcija gustoće mase

$$(a)\ f(x,y) = 3, \qquad (b)\ f(x,y) = x, \qquad (c)\ f(x,y) = xy.$$

(i) Grafički predočite i interpretirajte raspored mase.

(ii) Izračunajte masu pravokutnika.

(iii) Podijelite pravokutnik na dva dijela jednakih masa.

Težište nehomogene ploče

Analogno formuli za težište nehomogenog segmenta

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx},$$

imamo formule za x i y koordinatu težišta nehomogene ploče

$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dx\,dy}{\int\int_D f(x,y)dx\,dy}, \quad y_T = \frac{\int\int_D yf(x,y)dx\,dy}{\int\int_D f(x,y)dx\,dy}.$$

Primjer 6

Odredite težišta ploča iz prethodnog primjera.

Primjer 7

Odredite masu čitave ravnine ako je funkcija gustoće mase dana sa

$$f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Ovo je primjer funkcije gustoće za koju se dobije konačna masa ravnine.

Preći ćemo na polarne koordinate

$$m = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, dr = \cdots = 2\pi.$$

Zadatci

1. Izračunajte masu pravokutnika $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = (x + y)^2$.
2. Izračunajte masu i odredite težište pravokutnika $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 4$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = x + y$.
   Podijelite pravokutnik na dva dijela jednake mase.
3. Izračunajte masu kruga sa središtem u ishodištu i radijusom $r = 2$ ako mu je funkcije gustoće mase dana sa $f(x, y) = x^2$.
4. Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = x^2 - 1$, $y = 1 - x^2$, $z = 0$ i $z = 2$.